7 класс

Задача 7.1. Улитка & бамбук.
Британские учёные-биологи вывели новый быстрорастущий сорт бамбука. Согласно их измерениям, стебли этого растения растут вверх с постоянной скоростью 5 см/ч в светлое время суток (с 4:00 утра до 8:00 вечера) и совсем не растут ночью (с 8:00 вечера до 4:00 утра). Однажды неутомимая улитка Дуглас решил забраться повыше и начал ползти вверх по стеблю бамбука со скоростью 15 см/ч относительно стебля. Забравшись на высоту 2 м над землёй, Дуглас сразу развернулся и пополз вниз с той же скоростью относительно стебля. В какой день и час Дуглас спустится обратно на землю, если он начал своё путешествие в понедельник в 4 утра?

Ответ: во вторник в 6 часов утра.

Решение: Светлое время суток длится 16 часов, а ночь 8 часов. Скорость подъёма улитки относительно земли в светлое время равна 15 см/ч + 5 см/ч = 20 см/ч. На высоту 2 м Дуглас заберётся за время 200 см/(20 см/ч) = 10 ч, то есть он успеет подняться на нужную высоту за световой день, и у его ещё останется 6 часов на спуск. Скорость спуска улитки относительно земли в светлое время равна 15 см/ч − 5 см/ч = 10 см/ч, следовательно, Дуглас к концу светового дня окажется на высоте 200 см − 10 см/ч · 6 ч = 140 см. В ночное время стебель не растёт, поэтому скорость спуска улитки относительно земли ночью равна 15 см/ч. За ночь Дуглас спустится ещё на 15 см/ч · 8 ч = = 120 см. Оставшиеся 20 см он проползёт на следующий световой день и потратит на это 20 см/(10 см/ч) = 2 ч. Таким образом, Дуглас спустится со стебля во вторник в 6 часов утра.

Критерии:
Найдены скорость подъёма улитки . . . . 1 балл
Найдено время подъёма . . . . 1 балл
Найдены скорость спуска улитки в светлое время . . . . 1 балл
Найдены скорость спуска улитки в ночное время . . . . 1 балл
Найден путь, пройденный улиткой ночью . . . . 1 балл
Найдено расстояние, оставшееся после 4 утра вторника . . . . 3 балла
Найдено время спуска на последнем участке . . . . 1 балл
Записан ответ . . . . 1 балл

Задача 7.2. Вода и кубики.

В цилиндрическом сосуде лежат три кубика (см. рис. 7.1). Высота кубика №1 равна 4 см, кубика №2 — 10 см, а кубика №3 — 6 см. В сосуд начинают медленно наливать воду. Через 20 секунд после начала эксперимента уровень воды достиг верхней грани кубика №1, ещё через 35 секунд — верхней грани кубика №2.

1. Какова площадь дна сосуда?
2. Сколько времени должно пройти **от начала эксперимента**, чтобы вода достигла верхней грани кубика №3? Объём воды, поступающей в сосуд в единицу времени, в течение всего эксперимента не меняется.

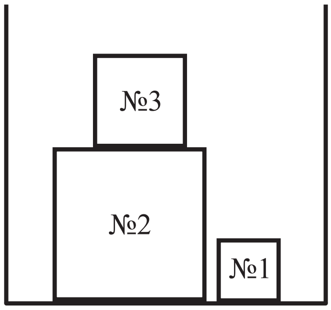


Рис. 7.1.

Ответ: 1) 212 см^2; 2) 110 с.

Решение: Пусть V — объём воды, поступающей в сосуд за 1 секунду, S — площадь дна сосуда, a — длина ребра первого, b — длина ребра второго, а c — длина ребра третьего кубика. Объём воды, налитой в сосуд на первые 20 секунд, равен

$$20\ \text{с} \cdot V = (S - a^2 - b^2)a \quad \Rightarrow \quad 20\ \text{с} \cdot V = (S - 116\ \text{см}^2) \cdot 4\ \text{см}.$$

За следующие 35 секунд уровень воды достиг верхней грани кубика №2:

$$35\ \text{с} \cdot V = (S - b^2) \cdot (b - a) \quad \Rightarrow \quad 35\ \text{с} \cdot V = (S - 100\ \text{см}^2) \cdot 6\ \text{см}.$$

Поделив записанные равенства друг на друга, получаем

$$\frac{35}{20} = \frac{(S - 100\ \text{см}^2) \cdot 6\ \text{см}}{(S - 116\ \text{см}^2) \cdot 4\ \text{см}} \quad \Rightarrow \quad 7(S - 116\ \text{см}^2) = 6(S - 100\ \text{см}^2) \quad \Rightarrow \quad S = 7 \cdot 116\ \text{см}^2 - 6 \cdot 100\ \text{см}^2 = 212\ \text{см}^2.$$

Подставляя найденное значение S в первое уравнение, получаем значение объёма V

$$20\ \text{с} \cdot V = (212\ \text{см}^2 - 116\ \text{см}^2) \cdot 4\ \text{см} \quad \Rightarrow \quad V = 19{,}2\ \text{см}^3/\text{с}.$$

Чтобы уровень воды достиг верха третьего кубика, нужно ещё налить объём, равный

$$V_3 = (S - c^2)c = (212\ \text{см}^2 - 36\ \text{см}^2) \cdot 6\ \text{см} = 1056\ \text{см}^3.$$

Время, которое на это потребуется, равно

$$t_3 = \frac{V_1}{V} = \frac{1056\ \text{см}^3}{19{,}2\ \text{см}^3/\text{с}} = 55\ \text{с}.$$

Общее время наполнения сосуда до верха третьего кубика составляет

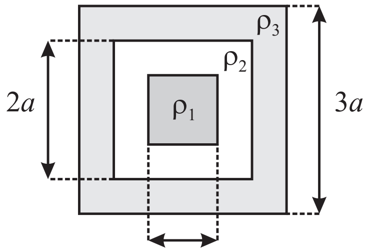
$$t = 20\ \text{с} + 35\ \text{с} + 55\ \text{с} = 110\ \text{с}.$$

Критерии:

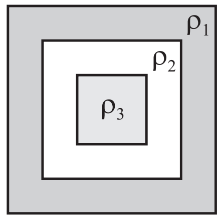
Записано уравнение $20\ \text{с} \cdot V = (S - a^2 - b^2)a$ . . . . 2 балла
Записано уравнение $35\ \text{с} \cdot V = (S - b^2)(b - a)$ . . . . 2 балла
Записано уравнение $Vt_3 = (S - c^2)c$ . . . . 1 балл
Найдена площадь дна сосуда S . . . . 2 балла
Найдено время t_3 . . . . 2 балла
Найдено общее время t . . . . 1 балл

Задача 7.3. Тайна древних сокровищ.

Во время раскопок учёные-археологи обнаружили два старинных амулета одинаковой квадратной формы и размера (см. рис. 7.2). Оба амулета состоят из трёх частей, сделанных из разных материалов. Границы между этими частями тоже имеют форму квадрата. В первом амулете (рис. 7.2а) центральная часть имеет плотность $\rho_1 = 19{,}3$ г/см^3, средняя — плотность $\rho_2 = 4$ г/см^3, а плотность внешней части равна ρ_3. У второго амулета материалы центральной и внешней частей поменяны местами (рис. 7.2б). Найдите плотность ρ_3, если масса второго амулета в 2,5 раза больше массы первого. Все размеры указаны на рис. 7.2а. Толщина обоих амулетов постоянна.



а)



б)

Рис. 7.2.

Ответ: 2,63 г/см^3.

Решение: Пусть h — толщина амулета. Площадь центральной части амулета равна a^2, площадь средней — $4a^2 - a^2 = 3a^2$, площадь внешней — $9a^2 - 4a^2 = 5a^2$. Массы амулетов равны

$$M_1 = (\rho_1 + 3\rho_2 + 5\rho_3)a^2h \qquad \text{(первый амулет)},$$

$$M_2 = (\rho_3 + 3\rho_2 + 5\rho_1)a^2h \qquad \text{(второй амулет)}.$$

Так как $M_2 = 2{,}5M_1$, получаем

$$2{,}5 = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\rho_3 + 3\rho_2 + 5\rho_1}{\rho_1 + 3\rho_2 + 5\rho_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{2}(\rho_1 + 3\rho_2 + 5\rho_3) = \rho_3 + 3\rho_2 + 5\rho_1.$$

Отсюда находим значение плотности ρ_3:

$$5\rho_1 + 15\rho_2 + 25\rho_3 = 2\rho_3 + 6\rho_2 + 10\rho_1 \quad \Rightarrow \quad \rho_3 = \frac{5\rho_1 - 9\rho_2}{23} \approx 2{,}63 \text{ г/см}^3.$$

Критерии:

Найдены площади всех частей амулета . . . . 2 балла
Записаны выражения для масс амулетов . . . . 3 балла
Записано уравнение для нахождения ρ_3 . . . . 3 балла
Найдено значение ρ_3 . . . . 2 балла

Задача 7.4. Треть и треть.
Экспериментатор Иннокентий Иванов поехал на своём автомобиле на дачу. Первую часть пути он двигался со скоростью $v_1 = 15$ м/с, на втором участке — со скоростью $v_2 = 600$ м/мин, а на третьем, последнем участке — со скоростью $v_3 = 60$ км/ч. По подсчётам Иннокентия, на первый участок он затратил треть **всего времени** своего движения, а длина второго участка была равна трети **всего пути**. Чему оказалась равна средняя скорость автомобиля на всём пути?

Ответ: 47,45 км/ч.

Решение: Переведём все скорости в км/ч: $v_1 = 54$ км/ч и $v_2 = 36$ км/ч. Пусть s — полный путь автомобиля, а t — полное время его движения. На первый участок приходится треть всего времени, а на второй участок — треть всего пути, поэтому

$$t_2 + t_3 = \frac{2t}{3}, \qquad s_1 + s_3 = \frac{2s}{3}.$$

Поскольку $s_1 = v_1 \cdot t/3$, $s_3 = v_3 t_3$, $t_2 = (s/3)/v_2$, $s = v_{\text{ср}} t$, получаем два уравнения

$$\frac{s}{3v_2} + t_3 = \frac{2t}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{\text{ср}} t}{3v_2} + t_3 = \frac{2t}{3},$$

$$\frac{v_1 t}{3} + v_3 t_3 = \frac{2v_{\text{ср}} t}{3}.$$

Выражаем из первого уравнения t_3 и подставляем во второе:

$$t_3 = \frac{2t}{3} - \frac{v_{\text{ср}} t}{3v_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1 t}{3} + v_3 \left(\frac{2t}{3} - \frac{v_{\text{ср}} t}{3v_2} \right) = \frac{2v_{\text{ср}} t}{3} \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_3 \left(2 - \frac{v_{\text{ср}}}{v_2} \right) = 2v_{\text{ср}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_1 + 2v_3 - \frac{v_3 v_{\text{ср}}}{v_2} = 2v_{\text{ср}} \quad \Rightarrow \quad 174 \text{ км/ч} - \frac{5}{3} v_{\text{ср}} = 2v_{\text{ср}} \quad \Rightarrow \quad \frac{11}{3} v_{\text{ср}} = 174 \text{ км/ч} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{ср}} \approx 47{,}45 \text{ км/ч}.$$

Критерии:
Записаны соотношения между путём, временем и скоростью для всех участков . . . . 1 балл
Записано условие $t_2 + t_3 = 2t/3$ . . . . 2 балла
Записано условие $s_1 + s_3 = 2s/3$ . . . . 2 балла
Записано уравнение, определяющее $v_{\text{ср}}$ . . . . 3 балла
Найдено значение $v_{\text{ср}}$ . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 7 классе 40

8 класс

Задача 8.1. Старый мост.

Между станциями Аистово и Ведёркино находится старый мост длиной 500 м. Поезд, выехавший со станции Аистово, первую половину пути (до моста) шёл со скоростью 60 км/ч. Подъехав к мосту, машинист поезда, соблюдая технику безопасности, сбросил скорость до 20 км/ч и сохранял её до того момента, пока состав полностью не съехал с моста. На оставшемся участке пути скорость поезда была увеличена до 80 км/ч. Какое путь прошёл поезд между Аистово и Ведёркино, если его средняя скорость составила 50 км/ч, а длина состава равна 280 м?

Ответ: 5,4 км.

Решение: Пусть s — весь путь, который прошёл поезд, а v_1, v_2 и v_3 — его скорости на первом, втором и третьем участках. Время, затраченное на первом участке, равно $t_1 = (s/2)/v_1$. На втором участке поезд преодолел старым мост. Путь, который он прошёл на втором участке, равен сумме длин моста и поезда: $s_2 = 780$ м, а затраченное время, соответственно, равно $t_2 = 780\text{ м}/v_2$. Оставшийся участок имеет длину $s_3 = s/2 - 780$ м, а время, затраченное на нём, $t_3 = (s/2 - 780\text{ м})/v_3$. Полное время равно $t = s/v_{\text{ср}}$, откуда

$$\frac{s}{v_{\text{ср}}} = \frac{s}{2v_1} + \frac{780\text{ м}}{v_2} + \frac{s/2 - 780\text{ м}}{v_3} \quad\Rightarrow\quad s\left(\frac{1}{v_{\text{ср}}} - \frac{1}{2v_1} - \frac{1}{2v_3}\right) = 780\text{ м}\cdot\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3}\right) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad s = 780\text{ м}\cdot\frac{1/v_2 - 1/v_3}{1/v_{\text{ср}} - 1/(2v_1) - 1/(2v_3)} = 780\text{ м}\cdot\frac{1/20 - 1/80}{1/50 - 1/120 - 1/160} = 780\text{ м}\cdot\frac{3/80}{13/2400} = 5400\text{ м}.$$

Критерии:

Найдено s_2 . . . . 2 балла

Записаны выражения для t_1, t_2 и t_3 . . . . 2 балла

Записана связь между s, $v_{\text{ср}}$ и v_1, v_2, v_3 . . . . 4 балла

Найдено s . . . . 2 балла

Задача 8.2. Монетки во льду.

Однажды мальчик Паша нашёл в папиной коллекции пятикопеечную монету времён СССР и принёс её в школу на урок физики. Там Паша вместе с учителем взяли эту монету и современную монету в 1 рубль, нагрели их в горячей воде и аккуратно положили плашмя на горизонтальную поверхность льда, взятого при температуре 0 ℃. Пятикопеечная монета проплавила под собой лёд и погрузилась в образовавшуюся лунку на 1 мм.

1. Чему была равна температура горячей воды?
2. Насколько погрузится в лёд рублёвая монета?

Справочные данные о монетах см. в таблице на рис. 8.1. Удельная теплоёмкость латуни равна 400 Дж/(кг · ℃), удельная теплоёмость стали — 500 Дж/(кг · ℃), удельная теплота плавления льда — 330 кДж/кг, плотность льда — 900 кг/м^3. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь.

Примечание: Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус круга, а $\pi \approx 3{,}14$.

Номинал	Материал	Масса, г	Диаметр, мм
5 копеек	Латунь	5	25
1 рубль	Сталь	3	20

Рис. 8.1.

Ответ: 1) 73 ℃; 2) 1,17 мм.

Решение: Пусть t — температура горячей воды, а h_1 и h_2 — глубина лунки во льду у пятикопеечной и рублёвой монетки. Монетка проплавляет под собой лёд, при этом охлаждаясь до 0 ℃. Запишем уравнения теплового баланса для обеих монет:

$$\lambda \rho_{\text{л}} \pi r_1^2 h_1 = c_{\text{лат}} m_1 (t - 0\,℃) \qquad (5 \text{ копеек}),$$

$$\lambda \rho_{\text{л}} \pi r_2^2 h_2 = c_{\text{ст}} m_2 (t - 0\,℃) \qquad (1 \text{ рубль}).$$

Из первого уравнения получаем

$$t = \frac{\lambda \rho_{\text{л}} \pi r_1^2 h_1}{c_{\text{лат}} m_1} = \frac{330000 \text{ Дж/кг} \cdot 900 \text{ кг/м}^3 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}0125 \text{ м})^2 \cdot 0{,}001 \text{ м}}{400 \text{ Дж/(кг} \cdot ℃) \cdot 0{,}005 \text{ кг}} \approx 73\,℃.$$

Для удобства поделим оба уравнения друг на друга и найдём h_2:

$$\frac{r_2^2 h_2}{r_1^2 h_1} = \frac{c_{\text{ст}} m_2}{c_{\text{лат}} m_1} \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_1 \cdot \frac{c_{\text{ст}} m_2 r_1^2}{c_{\text{лат}} m_1 r_2^2} = 1 \text{ мм} \cdot \frac{500 \cdot 3 \cdot 12{,}5^2}{400 \cdot 5 \cdot 10^2} = 1{,}17 \text{ мм}.$$

Критерии:

Записано уравнение теплового баланса для первого случая . . . . 2 балла
Записано уравнение теплового баланса для второго случая . . . . 2 балла
Найдено значение температуры воды . . . . 3 балла
Найдена глубина лунки во втором случае . . . . 3 балла

Задача 8.3. Повышаем уровень.

Девочка Наташа взяла в школьной лаборатории цилиндрический сосуд, налила в него слой воды высотой $h_0 = 20$ см и стала экспериментировать. Сначала Наташа полностью погрузила в сосуд алюминиевую гирьку, и оказалось, что уровень воды увеличился до $h_1 = 22$ см. Аккуратно вынув гирьку, девочка опустила в сосуд деревянный брусок, который стал плавать. В этом случае высота слоя воды стала равна $h_2 = 25$ см. Наконец, девочка поставила гирьку на брусок и, убедившись, что конструкция плавает, в третий раз измерила уровень воды.
1. Какое значение h_3 она получила?
2. Какова плотность дерева, из которого сделан брусок, если в последнем случае он погрузился на половину своего объёма?
Плотность воды равна 1000 кг/м^3, плотность алюминия — 2700 кг/м^3. Во время всех экспериментов вода из сосуда не выливается.

Ответ: 1) 30,4 см; 2) 240 кг/м^3.

Решение: Пусть S — площадь дна сосуда, m — масса гирьки, M — масса бруска, а V_0 — его объём. Алюминиевая гирька тонет в воде, поэтому объём, вытесняемый ей, равен объёму гирьки:

$$S(h_1 - h_0) = \frac{m}{\rho_{\text{ал}}} \quad \Rightarrow \quad m = \rho_{\text{ал}} S(h_1 - h_0).$$

Брусок плавает в воде, поэтому $Mg = \rho_{\text{в}} V g$, где V — объём погруженной части. С другой стороны, $V = S(h_2 - h_0)$. Отсюда получаем, что

$$M = \rho_{\text{в}} S(h_2 - h_0).$$

В третьем случае система тоже плавает, погружаясь на половину объёма бруска, поэтому

$$(m + M)g = \rho_{\text{в}} \cdot \frac{V_0}{2} \cdot g \quad \Rightarrow \quad \frac{V_0}{2} = \frac{m + M}{\rho_{\text{в}}} = \frac{\rho_{\text{ал}}}{\rho_{\text{в}}} S(h_1 - h_0) + S(h_2 - h_0).$$

Поскольку $V_0/2 = S(h_3 - h_0)$, получаем

$$S(h_3 - h_0) = \frac{\rho_{\text{ал}}}{\rho_{\text{в}}} S(h_1 - h_0) + S(h_2 - h_0) \quad \Rightarrow \quad h_3 = \frac{\rho_{\text{ал}}}{\rho_{\text{в}}}(h_1 - h_0) + h_2 = 2{,}7 \cdot 2 \text{ см} + 25 \text{ см} = 30{,}4 \text{ см}.$$

Плотность дерева, соответственно, равна

$$\rho_{\text{д}} = \frac{M}{V_0} = \frac{\rho_{\text{в}} S(h_2 - h_0)}{2S(h_3 - h_0)} = \frac{h_2 - h_0}{2(h_3 - h_0)}\, \rho_{\text{в}} \approx 240 \text{ кг/м}^3.$$

Критерии:

Записано условие равенства объёма гирьки и объёма вытесненной воды в первом случае . . . . 1 балл
Найден объём погруженной части V' во втором случае . . . . 1 балл
Записано условие равенства V' и объёма вытесненной воды во втором случае . . . . 1 балл
Записано условие плавания в третьем случае . . . . 2 балла
Записано, что $V_0/2 = S(h_3 - h_0)$ . . . . 1 балл
Найдено h_3 . . . . 2 балла
Найдена плотность дерева . . . . 2 балла

Задача 8.4. Знание — сила!

Как-то раз учёный Иннокентий Иванов пошёл на рынок купить мандарины к Новому году. К сожалению, продавец фруктов оказался «хитрым» и достал для взвешивания весы, изображённые на рис. 8.2. Он взял пакет с отобранными Иннокентием мандаринами, положил на левую чашу весов и уравновесил его положенным на правую чашу грузом в 1 кг. Но учёный не растерялся и, добавив на левую чашу гирьку в 500 г, предложил перевесить. Оказалось, что пакет мандаринов вместе с гирькой уравновешивается набором грузов общей массой 1 кг 750 г. Чему равна истинная масса пакета мандаринов, если весы с пустыми чашами находились в равновесии?

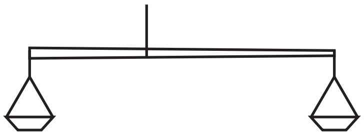


Рис. 8.2.

Ответ: 2/3 кг.

Решение: Так как пустые весы в равновесии, центр тяжести весов (вместе с чашами) находится на одной прямой с подвесом. Пусть L_1 и L_2 — расстояния от точек крепления чаш до точки подвеса, а M — масса пакета мандаринов. Запишем правило моментов относительно точки подвеса весов:

$$MgL_1 = 1\text{ кг}\cdot gL_2 \quad\Rightarrow\quad ML_1 = 1\text{ кг}\cdot L_2 \qquad \text{(первый случай)},$$

$$(M + 0{,}5\text{ кг})gL_1 = 1{,}75\text{ кг}\cdot gL_2 \quad\Rightarrow\quad (M + 0{,}5\text{ кг})L_1 = 1{,}75\text{ кг}\cdot L_2 \qquad \text{(второй случай)}.$$

Поделив эти уравнения друг на друга, получаем

$$\frac{M + 0{,}5\text{ кг}}{M} = \frac{1{,}75\text{ кг}}{1\text{ кг}} \quad\Rightarrow\quad M = \frac{2}{3}\text{ кг} \approx 670\text{ г}.$$

Критерии:

Указано, что центр масс весов находится в точке подвеса . . . . 2 балла
Записано правило моментов для первого случая . . . . 3 балла
Записано правило моментов для второго случая . . . . 3 балла
Найдена масса пакета с мандаринами . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 8 классе 40

9 класс

Задача 9.1. Ускорение+замедление.

Автомобиль тронулся с места с постоянным ускорением a. Разогнавшись, он половину всего пути двигался равномерно со скоростью, набранной в конце предыдущего участка. После этого водитель нажал на педаль тормоза, и автомобиль стал замедляться с постоянным ускорением, равным по модулю $2a$. Через время τ, прошедшее с момента старта, машина остановилась. Какой путь s она проехала?

Ответ: $8a\tau^2/27$.

Решение: Пусть v — скорость автомобиля на втором участке. Тогда время его разгона и торможения равны $t_1 = v/a$ и $t_3 = v/(2a)$ соответственно. Время, затраченное автомобилем на втором участке, составляет $t_2 = s/(2v)$. Отсюда получаем, что

$$\tau = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{v}{a} + \frac{s}{2v} + \frac{v}{2a} = \frac{3v}{2a} + \frac{s}{2v} \quad \Rightarrow \quad v\tau = \frac{3v^2}{2a} + \frac{s}{2}.$$

С другой стороны, длины первого и третьего участков s_1 и s_3 задаются как

$$s_1 = \frac{v^2}{2a}, \qquad s_3 = \frac{v^2}{2 \cdot 2a} = \frac{v^2}{4a}.$$

Так как $s_1 + s_3 = s/2$, получаем ещё одно уравнение:

$$\frac{v^2}{2a} + \frac{v^2}{4a} = \frac{s}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{2} = \frac{3v^2}{4a}.$$

Из найденных уравнений исключаем s:

$$v\tau = \frac{3v^2}{2a} + \frac{3v^2}{4a} \quad \Rightarrow \quad v\tau = \frac{9v^2}{4a} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{4a\tau}{9}.$$

Отсюда

$$\frac{s}{2} = \frac{3v^2}{4a} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{3v^2}{2a} = \frac{8a\tau^2}{27}.$$

Критерии:

Записаны выражения для t_1 и t_3 . . . . 1 балл
Записаны выражения для s_1 и s_3 . . . . 1 балл
Записано уравнение, связывающее τ, s, v и a . . . . 2 балла
Записано второе уравнение, связывающее s, v и a . . . . 2 балла
Найдено, что $v = 4a\tau/9$ . . . . 2 балла
Найдено выражение для s . . . . 2 балла

Задача 9.2. Кубики на ниточке.

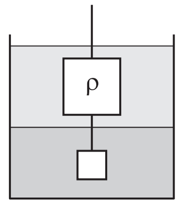


Рис. 9.1.

В сосуд, в котором находятся вода и керосин, погрузили на нити два сплошных кубика одинаковой массы, связанных между собой ещё одной нитью. Оказалось, что когда первый кубик с плотностью $\rho = 550$ кг/м^3 целиком погружен в верхнюю жидкость, а второй — целиком погружен в нижнюю (см. рис. 9.1), сила натяжения верхней нити вдвое меньше силы натяжения нижней.

1. Определите силу натяжения нижней нити, если объём верхнего кубика равен $V = 200$ см^3.
2. Чему равна плотность материала нижнего кубика?

Плотность воды равна $\rho_в = 1000$ кг/м^3, плотность керосина — $\rho_к = 800$ кг/м^3. Массой и объёмом нитей пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Ответ: 1) 1 Н; 2) 11 г/см^3.

Решение: Так как плотность керосина меньше плотности воды, верхняя жидкость — керосин, а нижняя — вода. Пусть T — сила натяжения нижней нити, а $T/2$ — сила натяжения верхней. Запишем условие равновесия верхнего кубика:

$$\rho_к V g + \frac{T}{2} = T + \rho V g \quad \Rightarrow \quad T = 2(\rho_к - \rho)Vg = 2(800\text{ кг/м}^3 - 550\text{ кг/м}^3)\cdot 0{,}0002\text{ м}^3 \cdot 10\text{ м/с}^2 = 1\text{ Н}.$$

Так как массы кубиков одинаковы, то $\rho V = \rho' V'$, где ρ' — плотность, а V' — объём нижнего кубика. Теперь запишем условие равновесия нижнего кубика:

$$T + \rho_в V' g = \rho' V' g \quad \Rightarrow \quad T + \frac{\rho_в \rho V g}{\rho'} = \rho V g \quad \Rightarrow \quad \rho' = \frac{\rho_в \rho V g}{\rho V g - T} = 11000\text{ кг/м}^3.$$

Критерии:

Записано условие равновесия верхнего кубика	2 балла
Найдена сила натяжения нижней нити	2 балла
Записана связь между объёмами кубиков	2 балла
Записано условие равновесия нижнего кубика	2 балла
Найдена плотность нижнего кубика	2 балла

Задача 9.3. Оптимизация!
В рис. 9.2 дано расписание движения поезда от станции Аистово до станции Дубинино и указано пройденное поездом расстояние. Чтобы оптимизировать расписание и сократить время путешествия, в управлении железных дорог было решено уменьшить длительность каждой стоянки на 15 мин и увеличить среднюю скорость поезда между любыми двумя станциями на некоторую величину v. Чему она должна быть равна, чтобы время поезда в пути от Аистово до Дубинино сократилось до 10,5 часов?

Станция	Прибытие	Отправление	Расстояние, км
Аистово	—	07:00	0
Боброво	10:00	10:32	150
Ведёркино	12:37	13:00	275
Гуськово	16:36	16:56	455
Дубинино	19:11	—	590

Рис. 9.2.

Ответ: 5 км/ч.

Решение: Сократив длительность каждой стоянки на 15 мин, получаем, что на станции Боброво поезд будет стоять 17 мин, на станции Ведёркино — 8 мин, а в Гуськово — 5 мин. Общая продолжительность всех остановок составит 30 мин. Таким образом, чистое время движения поезда должно уменьшится до 10 часов.

Найдём теперь скорости движения поезда между станциями до оптимизации:

$$\text{(Аистово–Боброво)} \qquad s_1 = 150 \text{ км}, \quad t_1 = 3 \text{ ч} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{s_1}{t_1} = 50 \text{ км/ч},$$

$$\text{(Боброво–Ведёркино)} \qquad s_2 = 125 \text{ км}, \quad t_2 = 2 \text{ ч } 5 \text{ мин} = \frac{125}{60} \text{ ч} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{s_2}{t_2} = 60 \text{ км/ч},$$

$$\text{(Ведёркино–Гуськово)} \qquad s_3 = 180 \text{ км}, \quad t_3 = 3 \text{ ч } 36 \text{ мин} = 3{,}6 \text{ ч} \quad \Rightarrow \quad v_3 = \frac{s_3}{t_3} = 50 \text{ км/ч},$$

$$\text{(Гуськово–Дубинино)} \qquad s_4 = 135 \text{ км}, \quad t_4 = 2 \text{ ч } 15 \text{ мин} = \frac{9}{4} \text{ ч} \quad \Rightarrow \quad v_4 = \frac{s_4}{t_4} = 60 \text{ км/ч}.$$

Так как $v_1 = v_3$ и $v_2 = v_4$, можно при расчётах объединить эти участки. Если каждую скорость увеличить на v, общее чистое время движения поезда должно стать равно 10 ч:

$$\frac{s_1 + s_3}{v_1 + v} + \frac{s_2 + s_4}{v_2 + v} = 10 \text{ ч} \quad \Rightarrow \quad \frac{330 \text{ км}}{50 \text{ км/ч} + v} + \frac{260 \text{ км}}{60 \text{ км/ч} + v} = 10 \text{ ч}.$$

Преобразуя это уравнение, получаем

$$v^2 + 51 \text{ км/ч} \cdot v - 280 \text{ (км/ч)}^2 = 0.$$

Решаем это уравнение и находим два корня: 5 км/ч и −56 км/ч. Последний корень отбрасываем, поэтому $v = 5$ км/ч.

Критерии:
Найдено общее чистое время движения поезда после оптимизации . . . . 1 балл
Найдены средние скорости поезда на каждом участке . . . . 3 балла
Записано уравнение, определяющее v . . . . 3 балла
Найдена величина v . . . . 3 балла

Задача 9.4. Новый автомобиль.

Учёный Иннокентий Иванов, купив себе новый автомобиль, решил с ним поэкспериментировать. Оказалось, что когда автомобиль пустой, оба его передних колеса давят на дорогу с силой 3 кН каждое, а задние — с силой 2 кН каждое. Если же багажник автомобиля загрузить мешками с картошкой, то сила давления каждого переднего колеса уменьшается на 100 Н.

1. На сколько возрастёт в этом случае сила давления заднего колеса на дорогу?

2. Какова общая масса всех мешков?

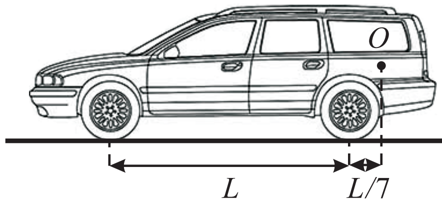


Рис. 9.3.

Центр тяжести груза находится в точке O (см. рис. 9.3). Во всех случаях автомобиль стоит без движения на горизонтальной дороге. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Ответ: 1) 140 кг; 2) на 800 Н.

Решение: Пусть точка C — центр масс пустого автомобиля, M — масса пустого автомобиля, m — масса груза, ΔN — величина, на которую увеличилась сила давления заднего колеса на землю во втором случае. Изобразим силы, действующие на автомобиль без груза (рис. 9.4а). Суммарные силы реакции опоры, действующие на передние и задние колёса, равны $N_1 = 2 \cdot 3$ кН $= 6$ кН и $N_2 = 2 \cdot 2$ кН $= 4$ кН. Из условия равновесия находим массу автомобиля

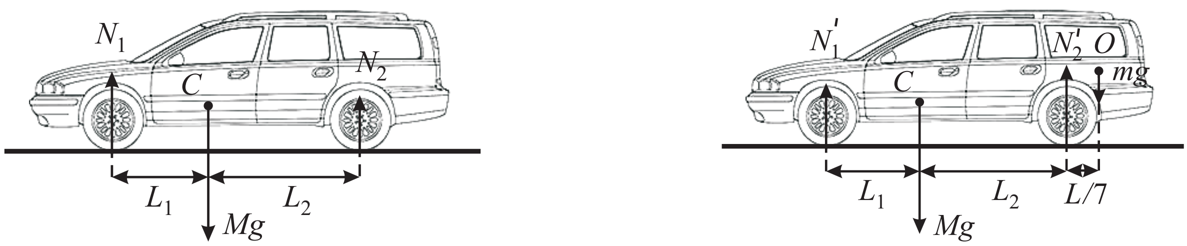


Рис. 9.4.

$$Mg = N_1 + N_2 = 10 \text{ кН} \quad \Rightarrow \quad M = 1000 \text{ кг}.$$

Запишем теперь правило моментов относительно переднего колеса:

$$N_2 L = MgL_1 \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{N_2 L}{Mg} = \frac{2L}{5}.$$

Соответственно, $L_2 = L - L_1 = 3L/5$.

Изобразим теперь силы, действующие на автомобиль с грузом (рис. 9.4б). Суммарные силы реакции опоры, действующие на передние и задние колёса, изменились и равны теперь $N_1' = N_1 - 2 \cdot 0{,}1$ кН $= 5{,}8$ кН и $N_2' = N_2 + 2 \cdot \Delta N = 4$ кН $+ 2\Delta N$. Запишем условие равновесие и правило моментов относительно заднего колеса:

$$N_1' + N_2' = Mg + mg \quad \Rightarrow \quad mg = N_1' + N_2' - Mg = 2\Delta N - 0{,}2 \text{ кН},$$

$$N_1' L + \frac{mgL}{7} = Mg \cdot \frac{3L}{5} \quad \Rightarrow \quad mg = 7\left(\frac{3Mg}{5} - N_1'\right) = 1{,}4 \text{ кН}.$$

Отсюда получаем, что $m = 140$ кг и

$$2\Delta N = mg + 0{,}2 \text{ кН} = 1{,}6 \text{ кН} \quad \Rightarrow \quad \Delta N = 800 \text{ Н}.$$

Критерии:

Найдена масса пустого автомобиля . . . . 1 балл
Найдено положение центра масс пустого автомобиля . . . . 2 балла
Записано условие равенства сил, действующих на автомобиль с грузом . . . . 2 балла
Записано правило моментов для второго случая . . . . 2 балла
Найдена масса груза . . . . 1 балл
Найдено изменение силы давления заднего колеса ΔN . . . . 2 балла

Задача 9.5. Нагревательный элемент.

Девятиклассница Алёна нашла в школьной лаборатории кусок алюминиевой проволоки, поместила его в калориметр, а концы проволоки подсоединила к источнику постоянного напряжения. В результате экспериментов Алёна выяснила, что лёд массой 100 г, взятый при температуре 0 ℃, полностью превращается в воду за 2 мин. За какое время этот же нагревательный элемент должен превратить 50 г воды, взятой при температуре 100 ℃, в пар? Удельная теплота плавления льда равна 330 кДж/кг, удельная теплота парообразования воды — 2,3 МДж/кг. Сопротивление проволоки зависит от её температуры t по закону $R = R_0(1 + \alpha t)$, где R_0 — сопротивление при температуре 0 ℃, а коэффициент α для алюминия равен 0,004 $\frac{1}{℃}$. Теплообменом калориметра с окружающей средой и сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Ответ: 585 с.

Решение: При температуре 100 ℃ проволока будет иметь сопротивление $R = R_0(1 + \alpha \cdot 100\,℃) = 1{,}4R_0$. На плавление $m_л = 100$ г льда требуется количество теплоты $Q_1 = \lambda m_л = 33$ кДж, а на испарение $m_п = 50$ г воды нужно количество теплоты $Q_2 = Lm_п = 115$ кДж. Пусть U — напряжение источника. Тогда, используя закон Джоуля-Ленца, получаем

$$Q_1 = \frac{U^2\tau_1}{R_0}, \qquad Q_2 = \frac{U^2\tau_2}{1{,}4R_0},$$

где $\tau_1 = 2$ мин — время плавления льда, а τ_2 — время кипения воды. Поделим эти соотношения друг на друга:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\tau_2}{1{,}4\tau_1} \quad \Rightarrow \quad \tau_2 = \frac{1{,}4Q_2}{Q_1}\tau_1 \approx 9{,}76 \text{ мин} \approx 585 \text{ с}.$$

Критерии:

Найдено сопротивление проволоки при 100 ℃ . . . . 2 балла
Найдено Q_1 . . . . 1 балл
Найдено Q_2 . . . . 1 балл
Записано уравнение теплового баланса при 0 ℃ . . . . 2 балла
Записано уравнение теплового баланса при 100 ℃ . . . . 2 балла
Найдено время кипения воды . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 9 классе 50

10 класс

Задача 10.1. Без друга — никуда!

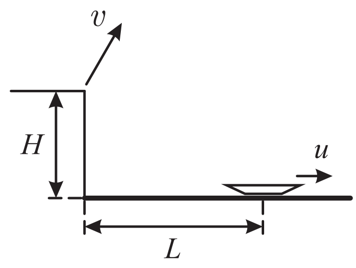


Рис. 10.1.

Как-то раз Ёжик решил сесть в лодку и уплыть прочь от острова Смешариков. Узнав об этом, его друг Крош бросился к морю. Когда Крош добежал до края высокого берега, Ёжик уже плыл по морю со скоростью $u = 3$ м/с в перпендикулярном берегу направлении. Не задумываясь, кролик прыгнул и приземлился точно в лодку друга! Какова высота берега H, если в момент прыжка лодка находилась на расстоянии $L = 4$ м от него, а Крош прыгнул под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту со скоростью $v = 10$ м/с (см. рис. 10.1)? В мире Смешариков сопротивление воздуха можно не учитывать, а ускорение свободного падения равно 10 м/с^2.

Ответ: 2,7 м.

Решение: Запишем уравнения движения лодки и Кроша (ось Ox — горизонтальна, ось Oy — вертикальна, начало координат находится у подножия высокого берега):

$$x_л(t) = L + ut, \quad y_л(t) = 0,$$

$$x_к(t) = v\cos 60^\circ t, \quad y_к(t) = H + v\sin 60^\circ t - \frac{gt^2}{2}.$$

Так как кролик приземлился точно в лодку, то

$$x_к(t) = x_л(t), \quad y_к(t) = 0.$$

Из первого уравнения получаем

$$L + ut = v\cos 60^\circ t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{v\cos 60^\circ - u} = \frac{4 \text{ м}}{10 \text{ м/с} \cdot 0{,}5 - 3 \text{ м/с}} = 2 \text{ с}.$$

Из второго уравнения находим высоту берега H:

$$H = -v\sin 60^\circ t + \frac{gt^2}{2} = -10 \text{ м/с} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \text{ с} + \frac{10 \text{ м/с}^2 \cdot (2 \text{ с})^2}{2} \approx 20 \text{ м} - 17{,}3 \text{ м} = 2{,}7 \text{ м}.$$

Критерии:

Записано уравнение $x_л(t) = L + ut$ . . . . 2 балла
Записаны уравнения движения Кроша . . . . 3 балла
Найдено время полёта Кроша . . . . 2 балла
Найдена высота берега . . . . 3 балла

Задача 10.2. Разъезд на перекрёстке.
Два автомобиля движутся к перекрёстку по двум взаимно перпендикулярным дорогам. Скорость первого автомобиля в два раза меньше скорости второго. В некоторый момент времени автомобили были равноудалены от перекрёстка, и расстояние между ними было равно L. Через время τ оно опять стало равно L. Какое расстояние будет между автомобилями ещё через время τ? Скорости автомобилей постоянны.

Ответ: $\sqrt{8{,}2}L \approx 2{,}86L$.

Решение: Пусть v — скорость первого автомобиля, тогда $2v$ — скорость второго. Направим оси координат вдоль обеих дорог так, чтобы начало координат было на перекрёстке. Так как автомобили в начальный момент времени были равноудалены от перекрёстка и находились на расстоянии L друг от друга, от перекрёстка они были удалены на расстояние $L/\sqrt{2}$. Запишем уравнения движения обоих автомобилей:

$$x_1(t) = L/\sqrt{2} - vt, \quad y_2(t) = L/\sqrt{2} - 2vt.$$

По условию задачи, при $t = \tau$ расстояние между автомобилями снова равно L:

$$L^2 = x_1(\tau)^2 + y_2(\tau)^2 = \left(\frac{L}{\sqrt{2}} - v\tau\right)^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{2}} - 2v\tau\right)^2 = L^2 - 3\sqrt{2}Lv\tau + 5v^2\tau^2 \quad \Rightarrow \quad v\tau = \frac{3\sqrt{2}L}{5}.$$

При $t = 2\tau$ координаты автомобилей будут равны

$$x_1(2\tau) = \frac{L}{\sqrt{2}} - 2v\tau = -\frac{7L\sqrt{2}}{10}, \quad y_2(2\tau) = \frac{L}{\sqrt{2}} - 4v\tau = -\frac{19L\sqrt{2}}{10},$$

а расстояние между ними составит

$$L' = \sqrt{x_1(2\tau)^2 + y_2(2\tau)^2} = \sqrt{\left(\frac{7L\sqrt{2}}{10}\right)^2 + \left(\frac{19L\sqrt{2}}{10}\right)^2} = L\sqrt{\frac{41}{5}} \approx 2{,}86L.$$

Критерии:

Записаны уравнения движения автомобилей . . . . 1 балл
Найдена связь между $v\tau$ и L . . . . 4 балла
Найдены координаты автомобилей при $t = 2\tau$ . . . . 3 балла
Найдено расстояние между автомобилями при $t = 2\tau$ . . . . 2 балла

Задача 10.3. Мостик Паши.
Для нахождения неизвестного сопротивления резистора R_x, мальчик Паша собрал мостовую электрическую схему, состоящую из этого резистора, резистора R с известным сопротивлением, реостата, источника постоянного напряжения и электронного вольтметра. В результате экспериментов мальчик выяснил, что когда ползунок реостата отстоит от левого края на четверть его длины (см. рис. 10.2а), вольтметр показывает напряжение $U_1 = 1$ В. Если же ползунок отстоит от правого края реостата на четверть его длины (рис. 10.2б), вольтметр показывает $U_2 = -2$ В.
1. Чему равно общее напряжение в цепи U?
2. Найдите сопротивление правого резистора R_x, если $R = 3$ Ом.
Вольтметр считать идеальным, а сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь. Полярность источника и вольтметра указаны на рисунках.

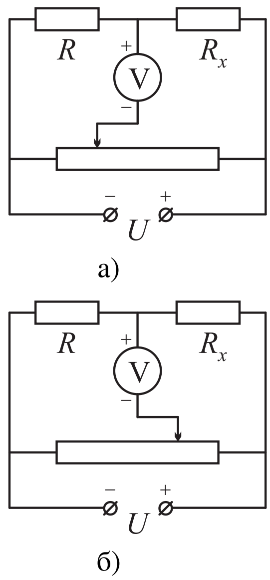


Рис. 10.2.

Ответ: 1) 6 В; 2) 4,2 Ом.

Решение: Сила тока, текущего через резисторы, равна $I = U/(R + R_x)$. Следовательно напряжение на резисторе R_x составляет $U_x = U R_x/(R+R_x)$. Напряжение на четверти реостата равно $U/4$, а на оставшейся части — $3U/4$. Напряжение на вольтметре равно разности напряжений на правой части реостата и на резисторе R_x:

$$U_1 = \frac{3U}{4} - \frac{U R_x}{R + R_x} \qquad \text{(в первом случае)},$$

$$U_2 = \frac{U}{4} - \frac{U R_x}{R + R_x} \qquad \text{(во втором случае)}.$$

Из полученных уравнений находим, что $U = 2(U_1 - U_2) = 6$ В и

$$\frac{R_x}{R + R_x} = \frac{3U/4 - U_1}{U} = \frac{7}{12} \quad \Rightarrow \quad R_x = \frac{7R}{5} = 4{,}2 \text{ Ом}.$$

Критерии:

Найдена сила тока I . . . . 2 балла
Записано уравнение для напряжений в первом случае . . . . 2 балла
Записано уравнение для напряжений во втором случае . . . . 2 балла
Найдено U . . . . 2 балла
Найдено сопротивление R_x . . . . 2 балла

Задача 10.4. Крутим-покрутим!

Массивное тело вращается на нити в вертикальной плоскости. Определите отношение скоростей тела в нижней и верхней точках его траектории, если сила натяжения нити в нижней точке траектории в три раза больше силы натяжения нити в верхней точке траектории. Нить считать невесомой и нерастяжимой. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение: Пусть m — масса тела, R — длина нити, v_1 — скорость тела в нижней точке, а v_2 — его скорость в верхней точке. Изобразим силы, действующие на тело в обоих случаях (см. рис. 10.3), и запишем 2-й закон Ньютона для обеих точек:

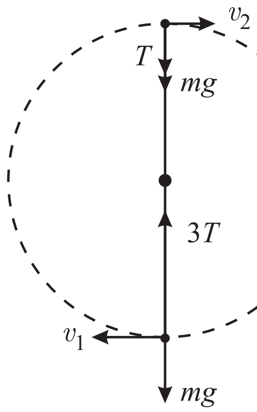


Рис. 10.3.

$$\frac{mv_1^2}{R} = 3T - mg \qquad \text{(в нижней точке)},$$

$$\frac{mv_2^2}{R} = T + mg \qquad \text{(в верхней точке)}.$$

Исключаем из этих уравнений T и получаем

$$\frac{3mv_2^2}{R} - \frac{mv_1^2}{R} = 4mg \quad \Rightarrow \quad 3v_2^2 - v_1^2 = 4gR.$$

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + mg \cdot 2R \quad \Rightarrow \quad v_1^2 - v_2^2 = 4gR.$$

Отсюда

$$3v_2^2 - v_1^2 = v_1^2 - v_2^2 \quad \Rightarrow \quad 4v_2^2 = 2v_1^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{2}.$$

Критерии:

Записан 2-й закон Ньютона для нижней точки . . . . 2 балла
Записан 2-й закон Ньютона для верхней точки . . . . 2 балла
Записан закон сохранения энергии . . . . 3 балла
Найдено отношение скоростей v_1 и v_2 . . . . 3 балла

Задача 10.5. Фонарь.

Недалеко от фонаря высотой 2,4 м находится странная конструкция, имеющая форму буквы «Г» (см. рис. 10.4а). Высота конструкции равна 80 см, длина её горизонтальной части — 60 см, а длина отбрасываемой ею тени — 140 см. Как-то раз десятиклассник Дима взял и развернул эту конструкцию, так что теперь её горизонтальная часть оказалась направлена в сторону фонаря (см. рис. 10.4б).

1. Найдите новую длину тени, если при развороте вертикальная часть конструкции осталась на месте.

2. На какое расстояние нужно сместить развёрнутую конструкцию от первоначального положения, чтобы длина отбрасываемой ею тени снова стала 140 см?

Фонарь можно считать точечным источником. Поверхность земли всюду горизонтальна.

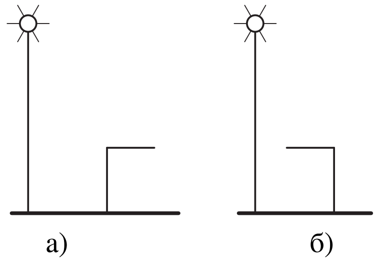


Рис. 10.4.

Ответ: 1) 90 см; 2) 180 см.

Решение: Рассмотрим первый случай (рис. 10.5а). Пусть x — первоначальное расстояние от фонаря до вертикальной части конструкции, а $s = 140$ см — длина тени. Из подобия треугольников имеем:

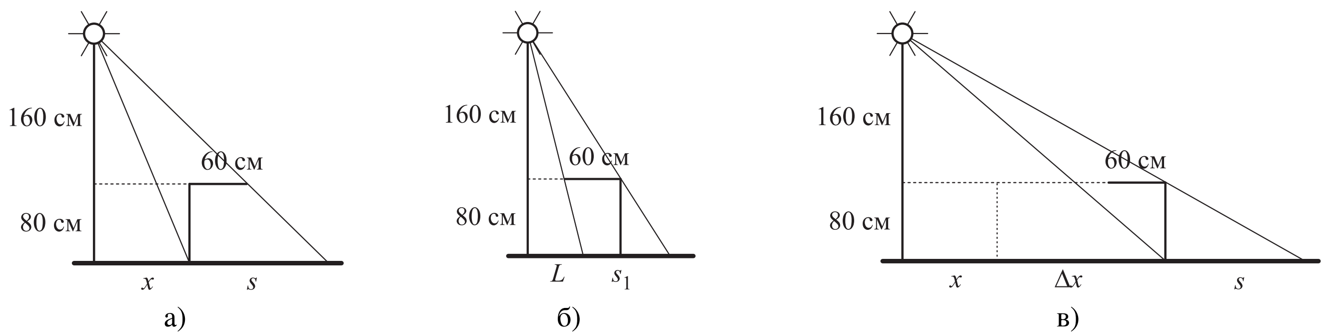


Рис. 10.5.

$$\frac{x+s}{x+60\text{ см}} = \frac{240\text{ см}}{160\text{ см}} \quad \Rightarrow \quad x+s = 1{,}5(x+60\text{ см}) \quad \Rightarrow \quad x = 2(s-90\text{ см}) = 100\text{ см}.$$

Во втором случае, когда конструкцию развернули на месте (рис. 10.5б), луч, проходящий через левый её край падает на зёмлю перед основанием конструкции. Докажем это. Пусть L — расстояние от фонаря до места падения этого луча. Из подобия

$$\frac{L}{x-60\text{ см}} = \frac{240\text{ см}}{160\text{ см}} \quad \Rightarrow \quad L = 1{,}5(x-60\text{ см}) = 60\text{ см} < x.$$

В результате, длина тени s_1 во втором случае находится из соотношения

$$\frac{s_1}{60\text{ см}} = \frac{240\text{ см}}{160\text{ см}} \quad \Rightarrow \quad s_1 = 1{,}5\cdot 60\text{ см} = 90\text{ см}.$$

Пусть теперь конструкцию смещают на расстояние Δx (рис. 10.5в). Из приведённого выше расчёта следует, при расположении крайних лучей, аналогичном рис. 10.5б, длина тени всегда будет 90 см. Если нужно получить её длину, равную $s = 140$ см, крайне левый луч должен пройти через основание конструкции. Для нахождения величины Δx опять воспользуемся подобием:

$$\frac{x+\Delta x+s}{x+\Delta x} = \frac{240\text{ см}}{160\text{ см}} \quad \Rightarrow \quad x+\Delta x = 2s = 280\text{ см} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = 2s - x = 180\text{ см}.$$

Критерии:

Найдено расстояние x от фонаря до вертикальной части конструкции . . . . 2 балла
Построены крайние лучи во втором случае . . . . 2 балла
Доказано, что крайне левый луч доходит о земли . . . . 1 балл
Найдена длина тени во втором случае . . . . 1 балл
Построены крайние лучи в третьем случае . . . . 2 балла
Найдено требуемое смещение Δx . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 10 классе 50

11 класс

Задача 11.1. Ускорение в квадрате.

В вершинах квадрата со стороной L закреплены заряды $-q$, q, $3q$ и $4q$ (см. рис. 11.1). В центр такого квадрата поместили заряд q с массой m. С каким ускорением a и под каким углом α к пунктирной линии AB начнёт двигаться этот заряд, если его отпустить?

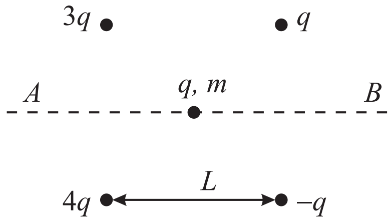


Рис. 11.1.

Ответ: $a = 10kq^2/(mL^2)$, $\alpha = \operatorname{arctg} 1/7 \approx 8^\circ$.

Решение: Расстояние между центральным зарядом и зарядами, расположенными в вершинах квадрата, одинаковые и равны $r = L/\sqrt{2}$. С помощью закона Кулона найдём силы, действующие на центральный заряд (см. рис. 11.2):

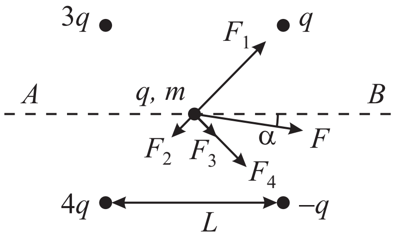


Рис. 11.2.

$$F_1 = \frac{kq \cdot 4q}{r^2} = \frac{8kq^2}{L^2}, \qquad F_2 = \frac{kq \cdot q}{r^2} = \frac{2kq^2}{L^2},$$

$$F_3 = \frac{kq \cdot q}{r^2} = \frac{2kq^2}{L^2}, \qquad F_4 = \frac{kq \cdot 3q}{r^2} = \frac{6kq^2}{L^2}, \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Они лежат на двух взаимно перпендикулярных диагоналях квадрата. Равнодействующая этих сил равна

$$F = \sqrt{(F_1 - F_2)^2 + (F_3 + F_4)^2} = \sqrt{\left(\frac{6kq^2}{L^2}\right)^2 + \left(\frac{8kq^2}{L^2}\right)^2} = \frac{10kq^2}{L^2}.$$

По 2-му закону Ньютона ускорение, которое приобретёт центральный заряд, равно $a = F/m = kq^2/(mL^2)$.

Для того чтобы определить угол между силой F и прямой AB, найдём проекции всех четырёх сил F_1, …, F_4 на ось Ox, направленную вдоль прямой AB, и на перпендикулярную ей ось Oy:

$$F_x = \left(F_1 + F_3 + F_4 - F_2\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{14kq^2}{L^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (\text{ось } Ox),$$

$$F_y = \left(F_1 - F_3 - F_4 - F_2\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2kq^2}{L^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (\text{ось } Oy).$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{F_y}{F_x}\right| = \frac{1}{7} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} \approx 8^\circ.$$

Критерии:

Найдены все силы, действующие на центральный заряд . . . . 2 балла
Найдена равнодействующая этих сил . . . . 3 балла
Найдено ускорение центрального заряда . . . . 2 балла
Найдено значение любой тригонометрической функции угла α . . . . 3 балла

Задача 11.2. Мастерство.

Как-то раз учёный Иннокентий Иванов решил поразвлечься. Он взял шайбу массой m и два диска массой $2m$ каждый и положил их на горизонтальный стол. Затем он пустил шайбу в сторону одного из дисков, стараясь сделать так, чтобы шайба отскочила от него в направлении, перпендикулярном первоначальному, попала во второй диск и снова отскочила в перпендикулярном направлении (рис. 11.3). Какую скорость после удара шайбы будет иметь **второй** диск, если первый диск после столкновения с шайбой приобрёл скорость v, а задумка Иннокентия осуществилась. Все удары считать абсолютно упругими. Трением пренебречь.

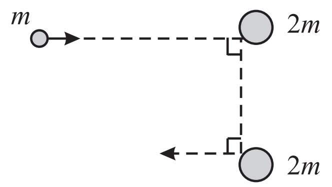


Рис. 11.3.

Ответ: $v/\sqrt{3}$.

Решение: Рассмотрим первое столкновение шайбы и диска. Выберем оси координат следующим образом: ось Ox направим вдоль начальной скорости шайбы, а ось Oy — в перпендикулярном направлении. Пусть u — начальная скорость шайбы, а u' — её скорость после отскока. Запишем закон сохранения импульса в проекции на обе оси и закон сохранения энергии:

$$mu = 2mv_x, \qquad 0 = 2mv_y - mu' \quad \text{(ЗСИ)},$$

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{2mv^2}{2} + \frac{mu'^2}{2} \quad \text{(ЗСЭ)},$$

где v_x и v_y — проекции скорости диска. Из первых уравнений получаем, что

$$v_x = \frac{u}{2}, \quad v_y = \frac{u'}{2}, \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{u^2 + u'^2}{4},$$

а из последнего:

$$\frac{u^2}{2} = v^2 + \frac{u'^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{u^2}{2} = \frac{u^2 + u'^2}{4} + \frac{u'^2}{2} \quad \Rightarrow \quad u'^2 = \frac{u^2}{3}.$$

Отсюда следует, что

$$v^2 = \frac{u^2 + u'^2}{4} = \frac{u^2}{3} \quad \Rightarrow \quad u = v\sqrt{3}, \quad u' = v.$$

Таким образом, при столкновении шайбы и диска, описанном в условии задачи, скорости разлетающихся после удара шайбы и диска равны между собой и в $\sqrt{3}$ раз меньше скорости налетающей шайбы. Столкновение шайбы со вторым диском полностью аналогично столкновению с первым, поэтому скорость отлетающего диска в $\sqrt{3}$ раз меньше скорости налетающей шайбы:

$$v' = \frac{u'}{\sqrt{3}} = \frac{v}{\sqrt{3}}.$$

Критерии:

Записан закон сохранения импульса для первого столкновения . . . . 4 балла
Записан закон сохранения энергии для первого столкновения . . . . 2 балла
Найдено, что $u = v\sqrt{3}$, $u' = v$ . . . . 2 балла
Найдена скорость второго диска после удара . . . . 2 балла

Задача 11.3. Неизвестный реостат.

Реостат представляет собой катушку индуктивностью L, сделанную из однородной проволоки с общим сопротивлением $4R$. Этот реостат включили в цепь, содержащую источник с ЭДС $\mathcal{E}$ и резистор сопротивлением R, так, как показано на рис. 11.4.

1. Какова энергия магнитного поля в реостате, когда его движок находится в крайне правом положении?
2. Какова энергия магнитного поля в реостате, когда его движок находится посередине?
3. Какова максимально возможная энергия магнитного поля в реостате?

Считать, что индуктивность катушки прямо пропорциональна её длине, а в цепи (во всех случаях) текут установившиеся токи. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

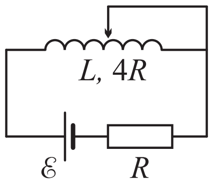


Рис. 11.4.

Ответ: 1) $L\mathcal{E}^2/(50R^2)$; 2) $L\mathcal{E}^2/(36R^2)$; 3) $L\mathcal{E}^2/(32R^2)$.

Решение: 1. Если движок находится в крайне правом положении, в цепь включен весь реостат. Сила тока, текущего через него, равна $I_1 = \mathcal{E}/(4R + R) = \mathcal{E}/(5R)$. Энергия катушки в этом случае равна

$$W_1 = \frac{LI_1^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{50R^2}.$$

2. Если движок посередине, то ток течёт только через левую половину реостата, а его правая половина закорочена. Индуктивность получившейся катушки составляет $L/2$. Сила тока, текущего через источник и левую половину реостата, равна $I_2 = \mathcal{E}/(2R + R) = \mathcal{E}/(3R)$, а энергия катушки —

$$W_2 = \frac{L}{2} \cdot \frac{I_2^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{36R^2}.$$

3. Пусть x — доля катушки, оставшейся незакороченной проводником. Тогда её индуктивность равна xL, а сопротивление — $4xR$. Сила тока, текущего через источник и левую часть реостата, равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{4xR + R} = \frac{\mathcal{E}}{R(4x + 1)} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathcal{E}}{IR} - 1\right),$$

а энергия катушки, соответственно, задаётся формулой

$$W = \frac{xLI^2}{2} = \frac{L}{8R} \cdot I(\mathcal{E} - IR).$$

Максимальное значение этой функции достигается в вершине параболы $W(I)$, то есть при $I_3 = \mathcal{E}/(2R)$. Исходя из этого, находим, что максимальное значение энергии катушки равно $W_{max} = L\mathcal{E}^2/(32R^2)$.

Критерии:

Найден ток I_1 и энергия в первом случае . . . . 1 балл
Найден ток I_2 . . . . 1 балл
Найдена энергия во втором случае . . . . 1 балл
Записано выражение для тока в третьем случае . . . . 1 балл
Записано выражение для энергии в третьем случае . . . . 2 балла
Найдено значение x или I, соответствующее максимуму энергии . . . . 3 балла
Найдено максимальное значение энергии . . . . 1 балл

Задача 11.4. Перестановка холодильника.
Мальчик Паша решил передвинуть холодильную камеру кубической формы и массой m, стоящую на горизонтальном полу. Левая опора камеры снабжена колёсиками (см. рис. 11.5), способными вращаться без трения, а коэффициент трения между полом и правой опорой равен $\mu = 1/4$. Какую минимальную горизонтальную силу F он должен приложить к середине верхней кромки камеры, чтобы сдвинуть холодильную камеру с места. Центр тяжести холодильной камеры совпадает с её геометрическим центром. Высотой опор можно пренебречь.

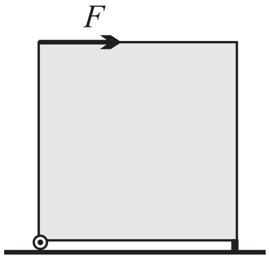


Рис. 11.5.

Ответ: $mg/6$.

Решение: На холодильную камеру действуют сила F, сила тяжести, сила трения $F_{\text{тр}}$ и две силы реакции опоры (см. рис. 11.6). Запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную ось:

$$0 = F - F_{\text{тр}}, \quad 0 = N_1 + N_2 - mg.$$

Если камера сдвигается с места, то сила трения равна $F_{\text{тр}} = \mu N_2 = N_2/4$. Запишем теперь правило моментов относительно центра масс камеры (L — расстояние от центра до грани куба):

$$FL + F_{\text{тр}}L + N_1 L = N_2 L \quad \Rightarrow \quad F + F_{\text{тр}} + N_1 = N_2.$$

Из полученных уравнений имеем:

$$F_{\text{тр}} = F, \quad N_2 = 4F, \quad N_1 = 2F,$$

$$0 = N_1 + N_2 - mg \quad \Rightarrow \quad 0 = 2F + 4F - mg \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mg}{6}.$$

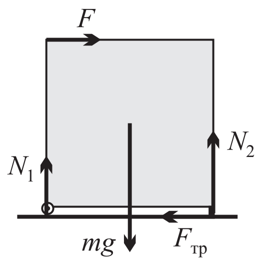


Рис. 11.6.

Критерии:

Записано условие $0 = F - F_{\text{тр}}$ . . . . 1 балл
Записано условие $0 = N_1 + N_2 - mg$ . . . . 1 балл
Формула $F_{\text{тр}} = \mu N_2$ . . . . 2 балла
Записано правило моментов . . . . 3 балла
Найдено, что $F = mg/6$ . . . . 3 балла

Задача 11.5. Давление и КПД.

Идеальный одноатомный газ, имеющий объём V_0 и находящийся под давлением p_0, является рабочим телом тепловой машины. В ходе её работы газ сначала изохорно нагревают, увеличивая давление до p_1, затем изобарно увеличивают его объём вдвое. После этого давление изохорно возвращают к начальному значению p_0 и изобарно сжимают до начального объёма. Во сколько раз давление p_1 больше давления p_0, если коэффициент полезного действия такой тепловой машины равен $\eta = 1/9$?

Ответ: В 1,5 раза.

Решение: Рассмотрим цикл 1-2-3-4-1, описанный в условии задачи (рис. 11.7). Работа газа за цикл равна

$$A = (p_1 - p_0)V_0.$$

Тепло подводится к газу на участках 1-2 и 2-3. Количество теплоты, полученное им, по первому началу термодинамики равно

$$Q_{123} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) + p_1 V_0.$$

Записывая уравнения Менделеева-Клапейрона для состояния 1 и 3,

$$p_0 V_0 = \nu R T_1, \quad p_1 \cdot 2V_0 = \nu R T_3,$$

и выражая из них температуры T_1 и T_3, получаем

$$Q_{123} = \frac{3}{2}(2p_1V_0 - p_0V_0) + p_1V_0 = 4p_1V_0 - \frac{3}{2}p_0V_0.$$

Поскольку КПД цикла равен 1/9,

$$Q_{123} = 9A \quad \Rightarrow \quad 4p_1V_0 - \frac{3}{2}p_0V_0 = 9p_1V_0 - 9p_0V_0 \quad \Rightarrow \quad 4p_1 - \frac{3}{2}p_0 = 9p_1 - 9p_0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = \frac{3}{2}\,p_0.$$

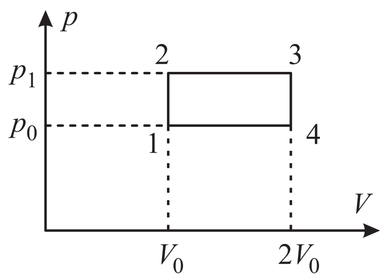


Рис. 11.7.

Критерии:

Записано выражение для A . . . . 2 балла
Записано выражение для Q_{123} . . . . 2 балла
Найдены температуры в точках 1 и 3 . . . . 2 балла
Записано уравнение $Q_{123} = 9A$ . . . . 2 балла
Найдено p_1 . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 11 классе 50